Chapitre 20

Probabilités générales

Ce chapitre est une généralisation du chapitre 5 (probabilités sur un ensemble fini). Il s'agit de prolonger les notions déjà vues au cas où l'univers est infini.

I Opérations sur une infinité d'ensembles

1) Unions et intersections infinies

Définition 1

Si I désigne une partie (finie ou non) de $\mathbb{N}$ et si $(A_n)_{n\in I}$ est une suite d'événements tous définis sur un espace Ω, alors on a :

$$\omega \in \bigcap_{k\in I} A_k \Leftrightarrow \forall k \in I, \omega \in A_k$$

Autrement dit : $\bigcap_{k\in I} A_k$ est réalisé si et seulement si, pour tout k de I, A_k est réalisé.

Définition 2

Si I désigne une partie (finie ou non) de $\mathbb{N}$ et si $(A_n)_{n\in I}$ est une suite d'événements tous définis sur un espace Ω, alors on a :

$$\omega \in \bigcup_{k\in I} A_k \Leftrightarrow \exists k \in I, \omega \in A_k$$

Autrement dit, $\bigcup_{k\in I} A_k$ est réalisé si et seulement si, il existe au moins un k de I pour lequel A_k est réalisé.

2) Lois de Morgan généralisées

a) Distributivité généralisée

Théorème 1

Si I désigne une partie (finie ou non) de $\mathbb{N}$ et si $(A_n)_{n\in I}$ est une suite d'événements tous définis sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$, alors, pour tout événement B de $(\Omega, \mathcal{A})$, on a :

$$B \cap \left(\bigcup_{k\in I} A_k\right) = \bigcup_{k\in I} (B \cap A_k) \text{ et } B \cup \left(\bigcap_{k\in I} A_k\right) = \bigcap_{k\in I} (B \cup A_k)$$

b) Loi de Morgan

Théorème 2

Si I désigne une partie (finie ou non) de $\mathbb{N}$ et si $(A_n)_{n\in I}$ est une suite d'événements tous définis sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$, alors on a :

$$\overline{\bigcap_{k\in I} A_k} = \bigcup_{k\in I} \overline{A_k} \text{ et } \overline{\bigcup_{k\in I} A_k} = \bigcap_{k\in I} \overline{A_k}$$

II Espace Probabilisable

1) Ensemble des événements

a) Introduction :

Au jeu des "petits chevaux", le joueur doit obtenir un 6 avec son dé pour pouvoir sortir un cheval de l'écurie. On s'intéresse au moment où le joueur obtient un 6 pour la première fois. On suppose donc que le jeu s'arrête dès qu'on obtient un 6 (le reste du jeu ne nous intéresse pas pour notre étude).
La difficulté, c'est que la modélisation demande désormais un univers infini, puisqu'on ne sait pas le nombre d'essais nécessaires (potentiellement infini !) à la réalisation de cet événement.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose A_k l'événement "le joueur obtient un 6 pour la première fois au k ième lancer.".
On obtient bien un objet correspondant à un événement au sens définit dans le chapitre 14.
Par exemple, A_1 correspondrait au résultat de l'expérience aléatoire (6)

La séquence de résultats $(1, 2, 5, 2, 6)$ est une issue appartement à l'événement .

Posons maintenant B_n l'événement "on obtient au moins un 6 en n lancers".

Alors $B_1 =$, $B_2 =$,..., et en fait $B_n =$

Et enfin, on souhaite étudier l'événement "le jeu s'arrête au bout d'un nombre fini de lancers", événement que l'on note B et on va avoir :

$$B =$$

En résumé :
Dans une situation comme celle ci, potentiellement infinie, on a besoin de pouvoir définir les unions d'événements éventuellement en nombre infini (mais "dénombrable").

On aura aussi besoin de définir des complémentaires, et d'après les lois de Morgan, nous aurons donc aussi besoin d'intersections d'événements, éventuellement en nombre infini.

b) Ensemble des événements

C'est ce genre d'observation qui mène à la création de l'objet suivant :

Définition 3

Soit Ω un univers (quelconque).
On appelle tribu ou ensemble des événements tout sous ensemble de $\mathscr{P}(\Omega)$, les parties de Ω, noté $\mathscr{A}$, vérifiant :

1. $\Omega \in \mathscr{A}$
2. *$\mathscr{A}$ est stable par complémentaire : si $A \in \mathscr{A}$, alors $\bar{A} \in \mathscr{A}$*
3. *$\mathscr{A}$ est stable par union et intersection finie ou infinie dénombrable :*
   (a) *Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ appartiennent à $\mathscr{A}$, alors*

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathscr{A} \text{ et } \bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathscr{A}$$

   (b) *Si pour tout $k \in \mathbb{N}$, A_k appartient à $\mathscr{A}$ (autrement dit, on a une suite infinie de A_k...), alors*

$$\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k \in \mathscr{A} \text{ et } \bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k \in \mathscr{A}$$

Définition 4

Soit un univers Ω associé à une expérience aléatoire et un ensemble d'événement $\mathscr{A}$ de $\mathscr{P}(\Omega)$.
Le couple $(\Omega, \mathscr{A})$ est appelé espace probabilisable.

A noter : *Plusieurs ensembles $\mathcal{A}$ possibles !*
Etant donnée une expérience aléatoire, plusieurs choix sont envisageables, et ce en fonction des besoins.
Par exemple : imaginons qu'on considère un unique lancer d'un dé 6 faces.
Alors $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ est un univers fini.
On peut choisir de considérer tous les événements possible en prenant $\mathcal{A} = \mathscr{P}(\Omega)$, mais si la seule chose qui nous intéresse est "avoir un 6", on peut se contenter de l'ensemble d'événements suivant :

$$\mathscr{A} = \{\emptyset, \Omega, \{1, 2, 3, 4, 5\}, \{6\}\}$$

2) Système complet d'événements

Définition 5

Soit Ω un univers (quelconque) et $I \subset \mathbb{N}$ une partie (finie ou non) de $\mathbb{N}$.
Une famille $(A_k)_{k \in I}$ avec $\forall k \in I$, $A_k \subset \Omega$ est appelé système complet d'événement si et seulement si :

(i) Si $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ (les événements sont deux à deux incompatibles)

(ii) $\bigcup_{k \in I} A_k = \Omega$

Remarque :
Il s'agit de la même définition que pour le cas Ω fini, à ceci près qu'on l'a étendue au cas infini (l'ensemble des indices, I, peut être infini).

? Le saviez-vous ? *Andreï Kolmogorov 1903-1987*

Issu d'une famille de la noblesse russe, et élevé par ses tantes (sa mère meurt en couche) sous la protection de son grand père, Andreï Kolmogorov fait preuve très tôt de qualités mathématiques absolument hors normes, associées à une curiosité débordante sur tous les domaines.

Malgré les perturbations de la révolution soviétique en 1918 (il doit travailler, entre autres, à la construction de voies ferrées pour le "bien de la patrie"), Kolmogorov parvient à poursuivre ses études à Moscou et se forme aux idées mathématiques novatrices venue de France (théorie de l'intégrale de Lebesgue en particulier).

A partir de 1925, il s'engage dans une refondation des probabilités pour leur donner un ancrage plus moderne : malgré son jeune âge, ses résultats sont reconnus unanimement et c'est son axiomatique qu'on utilise aujourd'hui.



Kolmogorov et trois de ses étudiants en 1965

source : Oberwolfach Photo Collection

Ses recherches touchent de nombreux domaines, principalement en probabilités et statistiques (avec des applications déterminantes en cybernétique, dans l'armement, dans la finance, etc.) mais aussi en poésie et en linguistique.

Sa volonté de faire de l'URSS un pays à la pointe des sciences et des mathématiques en particulier le pousse à fonder en 1960 un internat/école à Moscou, réservé aux jeunes prodiges repérés partout sur le territoire, y compris dans les villages reculés. Il s'y investit énormément en tant que professeur, et est reconnu comme excellent pédagogue. Plusieurs de ses élèves sont aujourd'hui encore au coeur de la recherche.

Il meurt en 1987, entrant dans le panthéon non seulement des plus grands mathématiciens de l'histoire, mais aussi des plus grands professeurs.

III Espace probabilisé

1) Probabilité :

Définition 6

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable. On appelle probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$ toute application P définie sur $\mathscr{A}$, à valeur dans $\mathbb{R}$ telle que :

1. *Pour tout événement A, $P(A) \geq 0$.*
2. *$P(\Omega) = 1$*
3. *P est une application **σ-additive** : pour toute suite d'événements incompatibles deux à deux, la série de terme général $P(A_n)$ converge et*

$$P\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(A_k)$$

Par rapport au cas fini, on demande donc une propriété garantissant une sorte de "stabilité" pour les familles infinies d'événements, avec l'intervention d'une série convergente.
C'est cette propriété qu'on appelle la σ-additivité.

Définition 7

On appelle espace probabilisé le triplet $(\Omega, \mathscr{A}, P)$

2) Propriétés

Une probabilité sur un univers quelconque a les mêmes propriétés que dans le cas fini :

Propriété 1

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ *un espace probabilisable et* P *une probabilité. Alors :*

1. $P(\emptyset) = 0$,
2. *pour tout famille finie* $A_1, A_2, \dots A_n$ *d'événements incompatibles, on a*

$$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

▷ *Preuve :*

◁

Une fois qu'on a ces propriétés, on retombe donc sur la définition déjà donnée de probabilité, d'où :

Propriété 2

Soient A *et* B *deux événements,*

1. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
2. *Si* $A \subset B$, $P(A) \leq P(B)$ *et* $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

3) Théorème de la limite monotone

a) Enoncé :

Théorème 3

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé. Alors :

(i) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements (c'est à dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$) alors

$$P(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$$

(ii) Si (A_n) est une suite décroissante d'événements (c'est à dire $A_{n+1} \subset A_n$), alors

$$P(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$$

▷ *Preuve :*

(i)

(ii) S'obtient en passant au complémentaire avec les lois de Morgan.

◁

b) Conséquence pratique

Le théorème de la limite monotone s'utilise assez rarement directement, mais il permet de démontrer résultat ci-dessous, d'utilisation très fréquente :

Théorème 4

Soit (A_n) une suite quelconque d'événements. On a

$$P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \quad \text{et} \quad P\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)$$

▷ *Preuve :*
Montrons la première formule.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $B_k = \bigcup_{i=0}^{k} A_i$.

Ainsi, pour tout k, $B_k \subset B_{k+1}$ et la suite est croissante.

De plus, pour tout n, $\bigcup_{k=0}^{n} B_k = B_n$ (puisque la suite est croissante) et donc $\bigcup_{k=0}^{n} B_k = \bigcup_{k=0}^{n} A_k$.

Finalement, $P(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k) = P(\bigcup_{k=0}^{+\infty} B_n)$.

D'après le théorème de la limite monotone, on a $P(\bigcup_{k=0}^{+\infty} B_n) = \lim P(B_n)$.

D'où $P(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k) = \lim_{n\to+\infty} P(\bigcup_{k=0}^{n} A_k)$

Pour la deuxième formule, on procède de même en posant $B_n = \bigcap_{k=0}^{n} A_k$, qui est une suite décroissante. ◁

c) Exemple d'utilisation

Reprenons l'exemple du jeu des petits chevaux et notons B_n l'événement "on obtient au mois un 6 en n lancers".

Dire que le cheval sort en un nombre fini de lancer est $\bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k$, et on a d'après ce qui précéde :

$$P(\bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k) = \lim_{n\to+\infty} P(\bigcup_{k=0}^{n} B_k)$$

Regardons le contraire de $\bigcup_{k=0}^{n} B_k$: c'est l'événement "en n lancers, il n'y a pas eu de 6".

En notant E_k l'événement "le k ième tirage n'a pas donné de 6", on a donc $\overline{\bigcup_{k=0}^{n} B_k} = \bigcap_{k=0}^{n} E_k$

Or par indépendance, $P(\bigcap_{k=0}^{n} E_k) = \prod_{k=0}^{n} P(E_k) = \left(\frac{5}{6}\right)^n$ et $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$

On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} P(\bigcup_{k=0}^{n} B_k) = \lim_{n\to+\infty} 1 - P(\bigcap_{k=0}^{n} E_k)$ et donc $P(\bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k) = 1$

Ainsi, la probabilité que le cheval sort en un nombre fini d'essais est donc 1.

4) "Presque sûrement"

a) Définition

Définition 8

> *On dit qu'un événement A est vrai "presque sûrement" si $P(A) = 1$.*
> *Dans le même esprit, on dit qu'un événement est négligeable si $P(A) = 0$.*
> *Enfin, on dit qu'une propriété est vraie "presque sûrement" si elle est vraie sauf sur des événements négligeables.*

b) Exemples :

1. Dans le jeu des petits chevaux, sortir en un nombre fini de lancer est un événement presque sûr.
   Que les chevaux restent à jamais dans l'écurie est un événement négligeable.
2. On prend un nombre réel au hasard entre 2 et 3. L'événement : "le nombre choisi est $2,245$" est un événement de probabilité nulle, donc négligeable.

A noter : *Impossible n'est pas presque sûr....*
En probabilité avec un univers infini, des événements "presque sûrs" peuvent ne pas avoir lieu, tout comme des événements négligeables peuvent avoir lieu.

IV Probabilités conditionnelles

L'ensemble du chapitre sur les probabilités conditionnelles se généralise aux espaces probabilisés sur un univers quelconque. On reformule donc, sans preuve (elles sont du type des preuves ci dessus, avec éventuellement des séries)...

1) Probabilité conditionnelles

Définition 9

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé, et B un événement de probabilité non nulle.
L'application

$$P_B : \begin{array}{ccc} \mathscr{A} & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \end{array}$$

est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$, appelée "probabilité conditionnée" par B.

Les propriétés sont exactement les mêmes que dans le cas fini, en particulier :

Propriété 3

1. $P_B(B) = 1$
2. $P_B(\bar{A}) = 1 - P_B(A)$
3. $P_B(A_1 \cup A_2) = P_B(A_1) + P_B(A_2) - P_B(A_1 \cap A_2)$

2) Formule des probabilités totales

Théorème 5

Soit I une partie (finie ou non) de $\mathbb{N}$.
Soit $(A_i)_{i \in \mathbb{I}}$ un système complet d'événements, chacun de probabilité non nulle.
Alors pour tout événement B,

$$P(B) = \sum_{k \in I} P(A_i \cap B) = \sum_{k \in I} P(A_i) P_{A_i}(B)$$

La formule est donc la même que dans le cas fini, avec une série qui apparait dans le cas où I est infini.

3) Formule de Bayes

Théorème 6 (*formule de Bayes*)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé. Alors

1. ***Version simple :*** *Soient A et B deux événements de probabilité non nulles, alors*

$$P_B(A) = \frac{P(A)P_A(B)}{P(B)}$$

2. ***Version avec système complet d'événements généralisé :***
Soit I une partie, finie ou non, de $\mathbb{N}$. Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{I}}$ un système complet d'événements, chacun de probabilité non nulle.
Soit B un événement tel que $P(B) \neq 0$. Alors pour tout $i \in I$, on a :

$$P_B(A_i) = \frac{P(A_i)P_{A_i}(B)}{\sum_{k\in I} P(A_k)P_{A_k}(B)}$$

4) Indépendance

Définition 10

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit I une partie (finie ou non) de $\mathbb{N}$ et soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événement.
On dit que ces événements sont mutuellement indépendants (ou indépendants) si et seulement si

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall i_1, \ldots, i_k \in I, P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \ldots P(A_{i_k})$$

Autrement dit : des événements (éventuellement en nombre infini dénombrable) sont indépendants, si et seulement si la relation d'indépendance est vérifiée pour toutes les intersections possibles de toutes les tailles possibles.

Remarque :
C'était déjà très souvent une hypothèse de l'énoncé dans le cas fini, ce sera encore plus souvent dans le cas avec un univers infini....